Filtrage linéaire

Décomposition en sinusoïdes : fonctions périodiques

Fonctions périodiques : série de Fourier

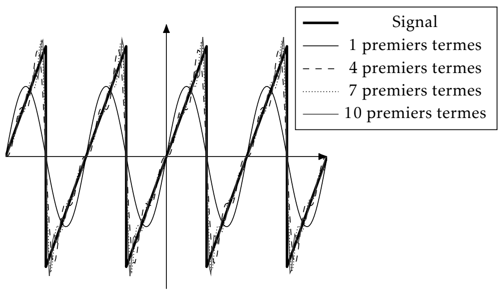
La plupart des fonctions $Y(t)$ T-périodiques peuvent être décomposées en une ***série de Fourier***[i] :

$$Y(t) = \sum_{p=0}^{+\infty} Y_p \cos\left(\omega_p t + \psi_p\right) \quad \text{avec : } \omega_p = \frac{2\pi p}{T}$$

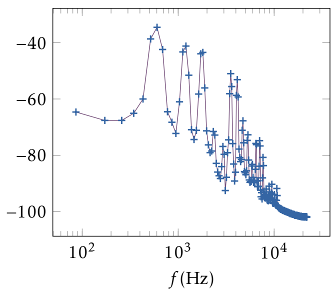
La fonction $Y_p \cos\left(\omega_p t + \psi_p\right)$, $p > 1$ est dite ***harmonique de rang*** n. Celle de rang 1 est nommée ***harmonique fondamental***.

[i] J. B. F. Fourier, mathématicien français (1768-1830).

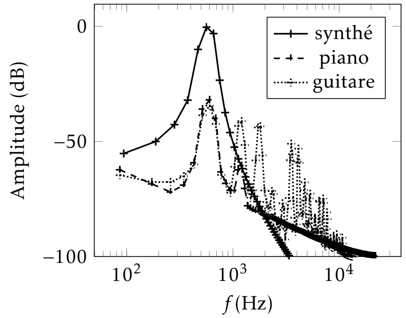
Approximations d'une fonction périodique



Représentation : spectre d'une corde de guitare

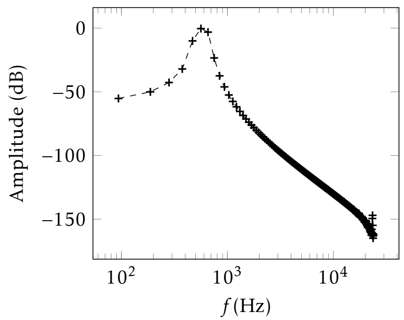


Spectre d'un signal

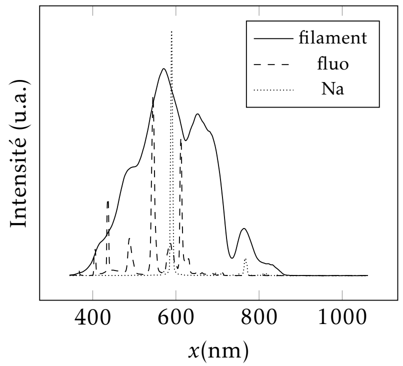


- les trois sons ont la même hauteur (ré4 587 Hz)
- le son du synthétiseur est le plus pur
- celui de la guitare contient le plus d'harmoniques

spectre numérique d'une sinusoïde



spectres d'un spectromètre à fibre

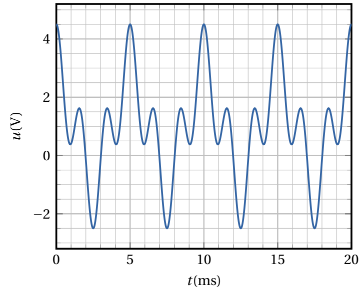


Exercice : décomposition de Fourier et valeur efficace

On considère le signal représenté sur la figure ci-dessous qu'on cherche à décomposer selon :

$$u(t) = U_0 + U_1 \cos\left(2\pi f_1 t\right) + U_p \cos\left(2\pi f_p t\right)$$

1. Déterminer graphiquement la fréquence du fondamental f_1 et le rang p de l'harmonique f_p.
2. En déduire les valeurs du décalage U_0 et des amplitudes U_1 et U_p.
3. En déduire le carré de la valeur efficace U_{eff}^2 du signal en fonction de U_0^2, U_1^2 et U_p^2.



4. Que deviendrait U_{eff} si on avait :

$$u(t) = U_0 + U_1 \cos\left(2\pi f_1 t\right) + U_p \cos\left(2\pi f_p t + \pi/2\right)?$$

Quelle serait alors l'allure du signal ?

Égalité de Parseval

Théorème : de Parseval
Le carré de la valeur efficace d'un signal $s(t)$ périodique est la somme des carrés des valeurs efficaces de ses harmoniques :

$$s_{eff}^2 = Y_0^2 + \sum_{p=1}^{\infty} Y_{p,eff}^2 = Y_0^2 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{Y_p^2}{2}$$

Schéma électronique d'un quadripôle

Définition : Quadripôle linéaire
Un quadripôle est dit ***linéaire*** si les tensions d'entrée $\underline{U_{\text{em}}}$ et de sortie $\underline{U_{\text{sm}}}$ s'expriment comme des combinaisons linéaires des intensités des courants d'entrée $\underline{I_{\text{em}}}$ et de sortie $\underline{I_{\text{sm}}}$.
Un dipôle :

actif branché en entrée est ***une source***,

passif branché en sortie est ***une charge***.

Opérateurs idéaux

Définition : Opérateurs idéaux
Dans les quadripôles fondamentaux, le signal de sortie est proportionnel au signal d'entrée. L'opérateur est dit ***idéal*** si :

- le signal fourni par la source branchée en entrée n'est pas perturbé par le quadripôle
- le signal de sortie est indépendant des caractéristiques de la charge branchée en sortie.

Amplificateurs et convertisseurs idéaux

Définition : Amplificateurs et convertisseurs idéaux
On distingue :

Amplificateur idéal de tension $\underline{U_{\text{sm}}} = \underline{k}\underline{U_{\text{em}}}$: $\underline{Y_e} = 0; \underline{Z_s} = 0$,

Convertisseur idéal tension → courant $\underline{I_{\text{sm}}} = \underline{l}\underline{U_{\text{em}}}$: $\underline{Y_e} = 0; \underline{Y_s} = 0$,

Convertisseur idéal courant → tension $\underline{U_{\text{sm}}} = \frac{1}{\underline{l}}\underline{I_{\text{em}}}$: $\underline{Z_e} = 0; \underline{Z_s} = 0$,

Amplificateur idéal de courant $\underline{I_{\text{sm}}} = \underline{k}\underline{I_{\text{em}}}$: $\underline{Z_e} = 0; \underline{Y_s} = 0$.

Quadripôle suiveur

Définition : Quadripôle suiveur
Un ***quadripôle suiveur*** est un amplificateur idéal réalisant $\underline{U_{\text{sm}}} = \underline{U_{\text{em}}}$:

- en prélevant un courant nul de la source,
- en pouvant fournir un courant arbitrairement grand à la charge.

Fonction de transfert

> **Définition : Fonction de transfert**
> On définit la ***fonction de transfert*** d'un quadripôle linéaire couplant une grandeur X_e d'entrée à une grandeur de sortie X_s en RSE à la pulsation ω le quotient : $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{X_{sm}}}{\underline{X_{em}}}$.

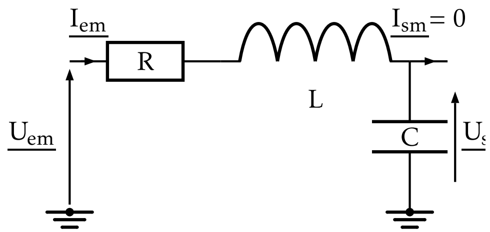
Fraction rationnelle

> **Fonction de transfert**
> La fonction de transfert d'un quadripole linéaire couplant X_e à X_s est une fraction rationnelle en $j\omega$:
> $$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{X_{sm}}}{\underline{X_{em}}} = \frac{\sum_{p=0}^{n_e} \alpha_p (j\omega)^p}{\sum_{p'=0}^{n_s} \alpha'_{p'} (j\omega)^{p'}}.$$
> On nomme ***ordre du quadripôle*** $\underline{H}$ le maximum de (n_e, n_s)

- la réponse (sortie/entrée) ne dépend que de ω, pas de l'amplitude de l'entrée
- stable à haute fréquence pour $n_s \geqslant n_e$
- stable à basse fréquence pour $\alpha'_0 \neq 0$

Exercice : le circuit RLC série vu comme un filtre

On réalise un amplificateur de tension à l'aide d'un circuit RLC série comme représenté ci-contre dans lequel par exemple $\underline{U_{\text{em}}}$ représente l'amplitude complexe de la tension d'entrée en régime sinusoïdal permanent.

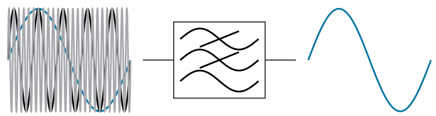


1. (a) Quel intérêt présente l'utilisation en ***sortie ouverte***, *ie* $\underline{I_{\text{sm}}} = 0$?
   (b) L'entrée du quadripôle est-elle idéale ?
2. Déterminer l'expression de la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U_{\text{sm}}}}{\underline{U_{\text{em}}}}$. On utilisera la pulsation propre $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et le facteur de qualité Q vérifiant $Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}$.
3. En déduire l'équation différentielle liant $u_s(t)$ à $u_e(t)$.

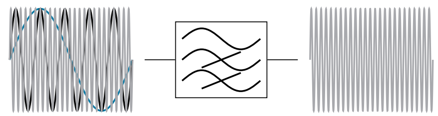
Fonctions d'un filtre

> **Définition : Filtrage d'un signal, bandes passante et coupée**
> Un quadripôle linéaire de fonction de transfert $\underline{H}(j\omega)$ réalise un ***filtrage*** du signal d'entrée :
>
> **en l'amplifiant** pour $|\underline{H}(j\omega)| > 1$,
>
> **en l'atténuant** pour $|\underline{H}(j\omega)| < 1$,
>
> **en le déphasant** pour $\arg(\underline{H}(j\omega)) \neq 0[2\pi]$
>
> en fonction de sa pulsation ω, indépendamment de son amplitude.
> On nomme :
>
> **Bande passante** le domaine de pulsations que le filtre doit transmettre,
>
> **Bande coupée** le domaine de pulsations que le filtre doit éliminer (le reste).

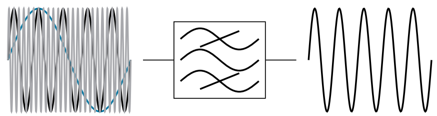
Filtres idéaux



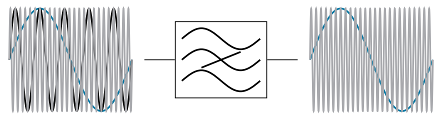
Passe bas : les moyenne et haute fréquence sont coupées



Passe haut : les moyenne et basse fréquence sont coupées



Passe bande : seules les moyennes fréquences passent



Coupe bande : seules les moyennes fréquences sont coupées

Éléments

Définition : Gain
On nomme ***gain***, noté H, d'un filtre le module de sa fonction de transfert : $H(\omega) = |\underline{H}(j\omega)|$. Le ***gain en décibel***, noté G_{dB} est défini par $G_{dB} = 20\log H$.

Diagramme de Bode

Définition : Diagramme de Bode
Le ***diagramme de Bode*** d'un quadripôle est constitué :

- de la représentation de son gain en décibel,
- de l'argument de sa fonction de transfert,

en fonction de $\log \omega/\omega_c$, où ω_c est une pulsation caractéristique du filtre.

Définition : Octave et décade
Une ***décade*** est un intervalle de fréquence $[\omega_1;\omega_2]$, avec $\omega_2 = 10\omega_1$, soit $\log\frac{\omega_2}{\omega_c} = \log\frac{\omega_1}{\omega_c} + 1$.
Une ***octave*** est un intervalle de fréquence $[\omega_1;\omega_2]$, avec $\omega_2 = 2\omega_1$, soit $\log\frac{\omega_2}{\omega_c} \simeq \log\frac{\omega_1}{\omega_c} + 0,3$.

Pulsation de coupure

Définition : Pulsation de coupure
On nomme ***pulsation de coupure à*** $-3dB$ une pulsation ω_c à la frontière entre une bande passante et une bande coupée d'un filtre au-delà de laquelle le gain G_{dB} en décibel est inférieur à $G_{dB0} - 20\log\sqrt{2} \simeq G_{dB0} - 3$, avec G_{dB0} le gain en décibel en bande passante dans le diagramme asymptotique.

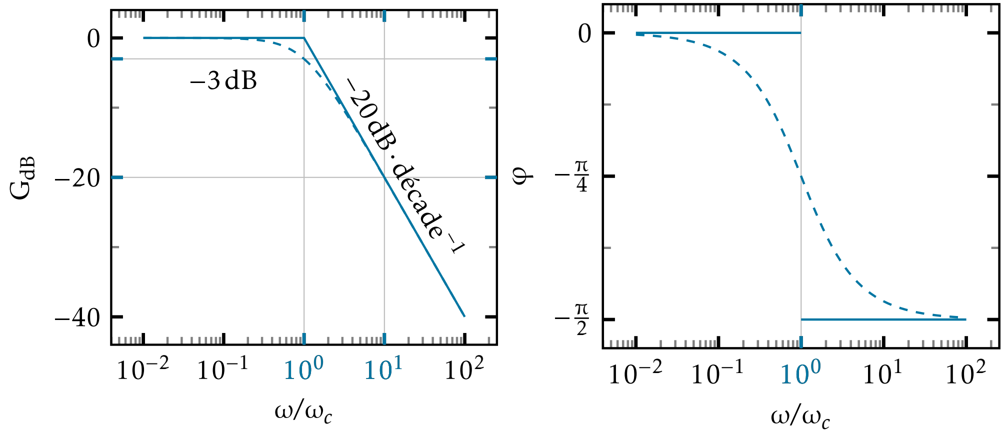
Modèle

Définition : Passe-bas du 1^er^ordre
Un filtre est un ***passe-bas du 1^er^ordre*** si sa fonction de transfert est de la forme :

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}},$$

avec H_0 réel et ω_c réel positif.

Diagramme de Bode



Caractère intégrateur

Définition : Circuit intégrateur idéal
La fonction de transfert d'un filtre intégrateur idéal est : $\underline{H} = H_0\frac{\omega_c}{j\omega}$ avec H_0 réel et ω_c réel positif. Les variations de sa tension de sortie, $s(t)$, sont proportionnelles à l'intégrale de sa tension d'entrée $e(t)$: $s(t) - s(t_0) \propto \int_{t_0}^{t} e(t)\mathrm{d}t$.

Caractère pseudo-intégrateur

Pseudo-intégrateur

Un filtre passe-bas du 1^er^ordre de pulsation de coupure ω_c est un ***pseudo-intégrateur***. Il est :

- intégrateur, *ie* réalise $s(t) - s(t_0) \propto \int_{t_0}^{t} e(t)\mathrm{d}t$, pour $e(t)$ sinusoïdale de pulsation $\omega \gg \omega_c$,
- suiveur, *ie* réalise $s(t) \propto e(t)$, pour $e(t)$ sinusoïdale de pulsation $\omega \ll \omega_c$.

Modèle

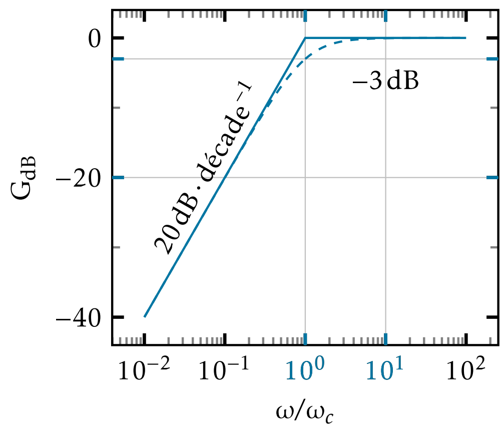
Définition : Passe-haut du 1^er^ordre

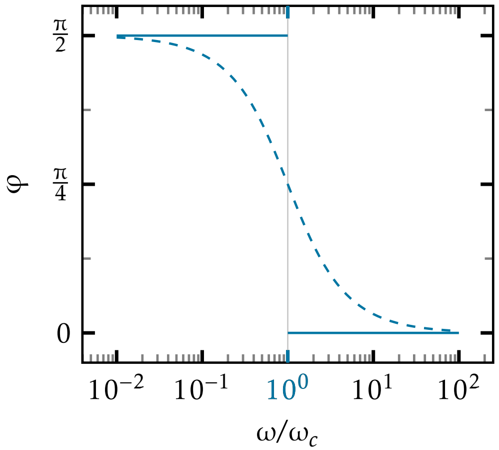
Un filtre est un ***passe-haut du 1^er^ordre*** si sa fonction de transfert est de la forme :

$$\underline{H} = \frac{jH_0\frac{\omega}{\omega_c}}{1+j\frac{\omega}{\omega_c}} = \frac{H_0}{1-j\frac{\omega_c}{\omega}},$$

avec H_0 réel et ω_c réel positif.

Diagramme de Bode





Caractère dérivateur et pseudo-dérivateur

Définition : Circuit dérivateur idéal

La fonction de transfert d'un filtre dérivateur idéal est : $\underline{H} = H_0\frac{j\omega}{\omega_c}$. Sa tension de sortie est proportionnelle à la dérivée de sa tension d'entrée : $s(t) \propto \dfrac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t}$.

Pseudo-dérivateur

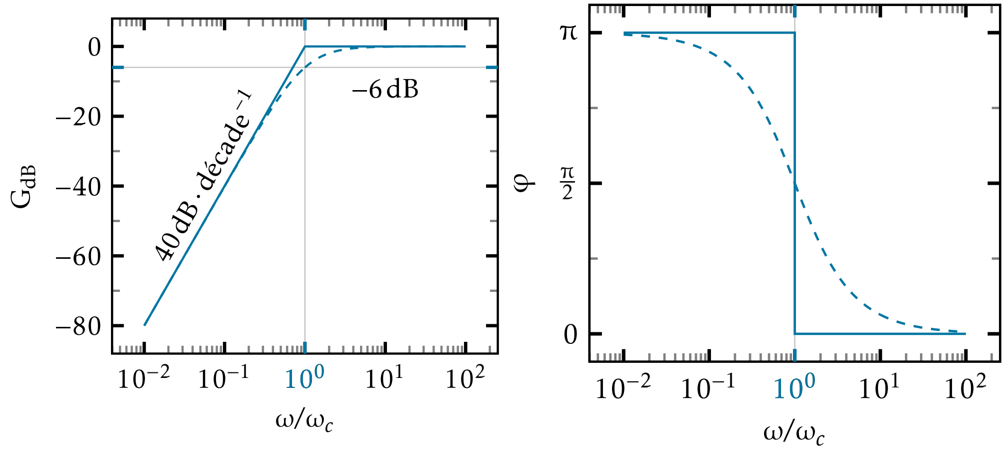
Un filtre passe-haut du premier 1^er^ordre de pulsation de coupure ω_c est un ***pseudo-dérivateur***. Il est :

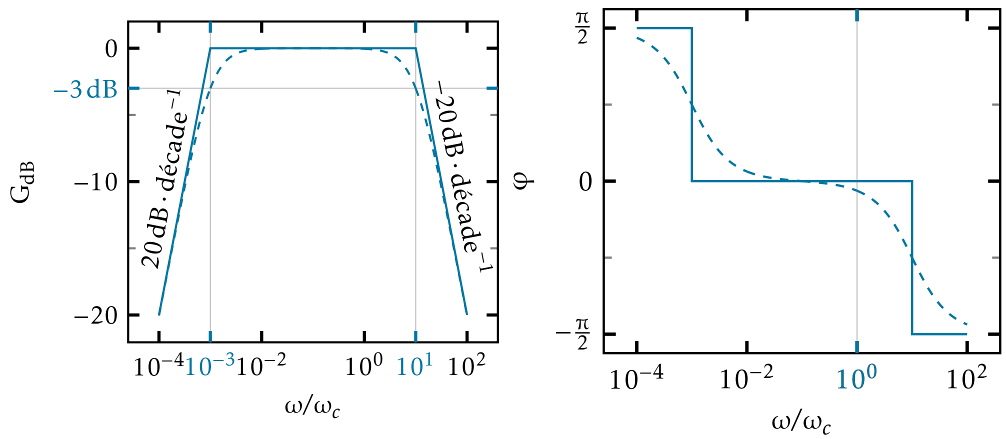
- dérivateur *ie* réalise $s(t) \propto \dfrac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t}$, pour $e(t)$ sinusoïdale de pulsation $\omega \ll \omega_c$,
- suiveur, *ie* réalise $s(t) \propto e(t)$, pour $e(t)$ sinusoïdale de pulsation $\omega \gg \omega_c$.

Mise en cascade

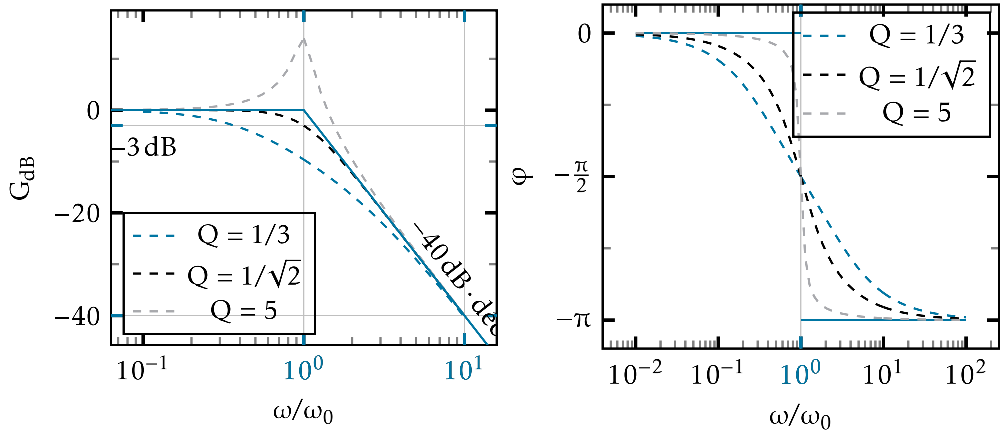
Si chacun des filtres d'une cascade de filtres est idéal en sortie, la fonction de transfert de l'ensemble est le produit des fonctions de transfert de chaque filtre. On a alors $G_{dB} = \sum G_{i,dB}$ et $\varphi = \sum_i \varphi_i$.

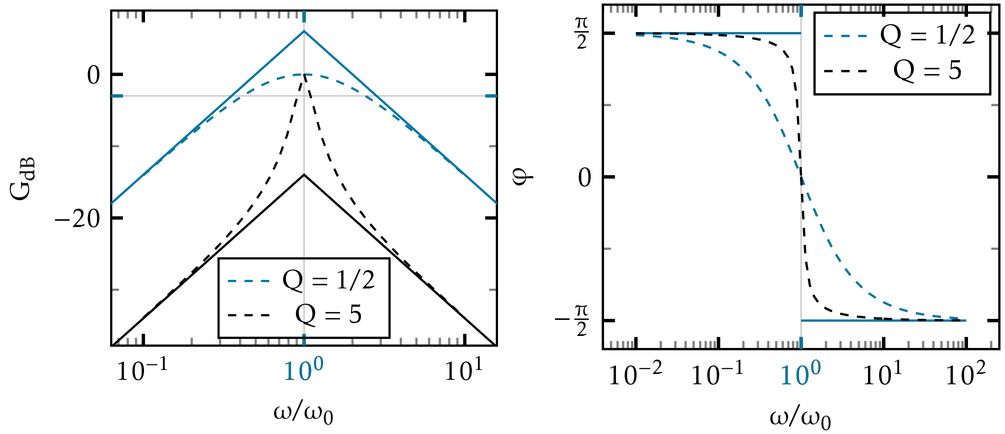
Diagrammes de Bode asymptotiques





RLC série en passe-bas d'ordre 2





Finesse d'une résonance

> **Définition : Finesse**
>
> On note ω_0 la pulsation telle que $G_{dB}(\omega_0) = G_{dB,max}$ est maximal, ω_1 (resp. ω_2 avec $\omega_1 < \omega_2$) les deux pulsations telles que $G_{dB}(\omega) = G_{dB,max} - 20\log(\sqrt{2}) \simeq G_{dB,max} - 3$. La ***finesse*** de la résonance est :
>
> $$\mathscr{F} = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1}.$$

Finesse d'un passe-bande d'ordre 2

La finesse d'un passe-bande d'ordre 2 est égale à son facteur de qualité :

$$\mathscr{F} = Q$$

Exercice : Paramètres canoniques d'un filtre

1. Déterminer les paramètres H_0, f_c du filtre passe-haut du premier ordre suivant :

$$\underline{H} = \frac{2}{3 - j10^5/f},$$

avec f exprimé en Hz. On rappelle la forme canonique :

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + \frac{\omega_c}{j\omega}}.$$

2. Déterminer les paramètres H_0, f_0 et Q du filtre passe-bas du deuxième ordre suivant :

$$\underline{H} = \frac{3}{5 + j10^{-5}f - 10^{-8}f^2},$$

avec f exprimé en Hz. On rappelle la forme canonique :

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{Q\omega_0} + \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2}.$$

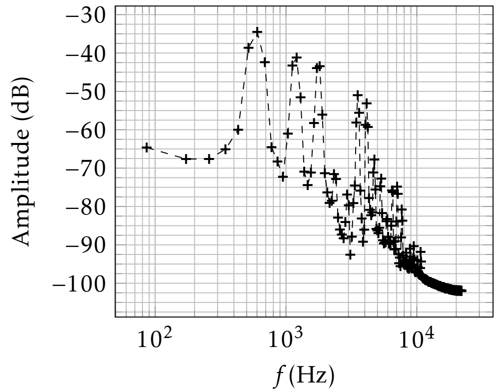
3. Déterminer les paramètres H_0, f_0 et Q du filtre passe-bande du deuxième ordre suivant :

$$\underline{H} = \frac{jf}{4jf - 10^{-3}f^2 + 10^3},$$

avec f exprimé en Hz. On rappelle la forme canonique :

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}.$$

Exercice : effets d'un filtre sur un spectre



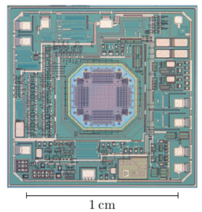
On considère le spectre d'un ré4 (de fréquence 587,5 Hz) de guitare donné ci-contre.

1. Déterminer l'allure du spectre du signal obtenu quand on applique un passe-bas d'ordre 1 de fréquence de coupure 500 Hz.
2. Comment choisir la fréquence de résonance et le facteur de qualité d'un filtre passe-bande d'ordre 2 pour obtenir un signal quasi sinusoïdal correspondant au ré5 ?
3. Proposer un montage possédant ces paramètres en utilisant entre autres une bobine de 50 mH

Exercice : Effets de filtres mécaniques

1. Un accéléromètre comme ceux équipant les téléphones portables peut être modélisé comme un oscillateur harmonique mécanique amorti par frottement fluide.

   Quand l'appareil est soumis à une accélération $\overrightarrow{a} = a\overrightarrow{e_x}$ par rapport à un référentiel galiléen, on montre que la masse mobile m est soumise à une force dite « d'inertie » égale à $\overrightarrow{F} = -m\overrightarrow{a}$.



Photographie d'un accéléromètre deux axes : le capteur MEMS est situé au centre (source *Analog Devices*)

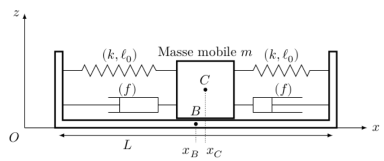


Schéma de principe du fonctionnement mécanique de l'accéléromètre suivant un axe

   (a) La masse m est soumise à l'action de deux ressorts identiques (k, ℓ_0) et de deux frottements fluides. On pose x_B l'abscisse du bâti auquel sont attachés les ressorts et x_C celle de la masse dans un référentiel galiléen. La force de frottement fluide subie par la masse a pour expression $-2f\left(\dot{x_C} - \dot{x_B}\right)$. Établir l'équation différentielle canonique vérifiée par la différence $X = x_C - x_B$. Identifier une pulsation propre ω_0 et un facteur de qualité Q.

(b) La fréquence propre vaut $f_0 = 5{,}5\,\mathrm{kHz}$ et le facteur de qualité vaut $Q = 5$. Le bâti est soumis à une accélération sinusoïdale $a = a_0 \cos(\omega t)$. Tracer l'allure de X_m / a_0 en fonction de ω. Quelle est la nature du filtre ?

(c) La masse est $m = 1\,\mathrm{\mu g}$. Déterminer la valeur de X_m quand on utilise l'accéléromètre pour mesurer l'accélération de la pesanteur $g = 9{,}8\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

(d) Pour quelle(s) fréquence(s) l'accéléromètre surestimera-t-il (resp. sousestimera-t-il) l'accélération à laquelle il est soumis d'un facteur 3 ?

2. On étudie le mouvement d'un véhicule muni d'une suspension. On note $h_0 + z$ l'altitude du véhicule (avec h_0 l'altitude au repos) et z_r celle de la chaussée dans le référentiel terrestre.

   (a) Faire un schéma en modélisant la suspension par un système masse-ressort vertical amorti par frottement fluide.

   (b) On modélise le profil de la chaussée par une variation sinusoïdale $z_r = Z_0 \cos(kx)$ avec x la coordonnée horizontale et on s'intéresse à la réponse $z = Z_m / Z_0$ en fonction de la vitesse v_0 selon x. Quelle doit être la nature du filtrage réalisé pour assurer le confort (et la sécurité) du véhicule ? Comment choisir son facteur de qualité ?

Indispensable

- principe et éléments d'un diagramme de Bode
- diagrammes asymptotiques
- filtres d'ordre 1
- composition de filtres